UNB–MP1. **Année universitaire 2021-2022.**

TD2. Lois de composition et groupes

Exercice 1.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(1) Soit $*$ la l.c.i. sur $\mathbb{R}$ définie par $x * y = x + y + x^2 y$.

(a) la l.c.i. $*$ est-elle commutative, associative ? Admet-elle un neutre ? Les éléments de $\mathbb{R}$ sont-ils symétrisables ?

(b) Résoudre les équations $2 * x = -3$ et $x * x = 3$.

(2) Etudier l'associativité, la commutativité et l'existence d'un neutre pour la l.c.i $*$ définie sur $]0, +\infty[$ par $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calculer $\underbrace{x * \cdots * x}_{n}$.

(3) Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une l.c.i. Un élément $x \in E$ est dit *idempotent* si $x * x = x$.

(a) Montrer que si $*$ est associative et si x et y sont idempotents et commutent alors $x * y$ est idempotent.

(b) Montrer que si $*$ est associative, admet un neutre et si x est idempotent et symétrisable alors x^{-1} est idempotent.

Exercice 2.

Soit $G = \{e, a, b, c, d, x\}$ un ensemble et une l.c.i $*$ sur G de sorte que $(G, *)$ soit un groupe de neutre e. Compléter la table suivante.

$*$	e	a	b	c	d	x
e						
a			d			c
b		x		d	c	
c		d				
d			a		x	e
x		b		a		

Exercice 3.

(1) Déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{Z}_n, +)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) L'ensemble $(\mathbb{Z}_6^*, \times)$ est-il un groupe ?

(3) Montrer que $(\mathbb{Z}_7^*, \times) \cong (\mathbb{Z}_6, +)$.

(4) Expliciter tous les morphismes de groupes $(\mathbb{Z}_m, +) \to (\mathbb{Z}_n, +)$.

Exercice 4.

Montrer que si p est premier alors $\left(\mathbb{Z}_p^*, \times\right)$ est un groupe.

(1) Trouver deux entiers relatifs u, v tels que $8u + 29v = 1$.

(2) En déduire le symétrique de $\bar{8}$ dans $(\mathbb{Z}_{29}^*)$.

(3) Déterminer les entiers relatifs x solutions de $8x \equiv 9\,[29]$

(4) Existe t-il un inverse de $\bar{8}$ dans $(\mathbb{Z}_{24})^*$?

(5) Déterminer les inversibles de $(\mathbb{Z}_{24})^*$.

(6) Déterminer l'inverse de $\bar{5}$ dans $(\mathbb{Z}_{11})^*$.

(7) Montrer que pour tout $x \in (\mathbb{Z}_{11})^*$ on a $x^9 = x^{-1}$.

Exercice 5.

Soit $n \geq 3$. On pose $U_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$. Soit $\omega_{k_0} = e^{\frac{2ik_0\pi}{n}}$ avec $k_0 \geq 1$ et d_0 l'ordre de ω_{k_0}.

(1) Montrer que $(U_n, \times)$ a une structure de groupe.

(2) Montrer que $k_0 d_0$ est un multiple de n.

(3) Montrer que si $n \wedge k_0 > 1$ alors l'ordre de ω_{k_0} est strictement inférieur à n.

(4) Montrer que si l'ordre de ω_{k_0} est n alors $k_0 \wedge n = 1$.

Exercice 6.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(1) On note $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
On considère l'application $p \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $t \longmapsto e^{2i\pi t}$.

(a) Montrer que $\mathbb{S}^1$ a une structure de groupes.

(b) Montrer que p est un morphisme de groupes.

(c) Déterminer le noyau de p.

(d) Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{S}^1$.

(2) Soient $n, d \in \mathbb{N}^*$, G un groupe abélien d'orde n noté multiplicativement et
$f : G \longrightarrow G$ l'application définie par $x \longmapsto x^d$.

(a) Montrer que f est un endomorphisme de G.

(b) Montrer que si $n \wedge d = 1$ alors f est un automorphisme de G.

(c) En déduire que si n est impair alors tout élément de G est un carré.

Exercice 7.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer la signature de

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

On note A_5 le groupe des permutations paires de 5 éléments. Soient α et β les permutations suivantes :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $G = \langle \alpha, \beta \rangle$ est un sous-groupe de A_5 d'ordre au moins 30.
2. Calculer $\beta\alpha\beta^{-1}$ et $\alpha\beta\alpha^{-1}$.

Exercice 9.

Soient n un entier ≥ 2 et $\sigma \in S_n$. On désigne par $\langle\sigma\rangle$ le groupe cyclique engendré par σ et d, l'ordre de σ dans le groupe S_n.

(1) Montrer que l'application $[\![0, d-1]\!] \to \langle\sigma\rangle, k \mapsto \sigma^k$ est bijective.

(2) On considère l'application $g\colon \mathbb{Z} \to S_n, k \mapsto \sigma^k$.

  (a) Montrer que g est un morphisme de groupes.

  (b) Déterminer $\mathrm{im} g$.

  (c) Déterminer $\ker g$.

(3) Montrer que la relation définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid y = \sigma^k(x)$ est une relation d'équivalence sur $[\![1, n]\!]$.

(4) Soit σ un cycle de longueur l sur $[\![1, n]\!]$ et de support noté S. On considère l'application $f\colon [\![0, d-1]\!] \to S, k \mapsto \sigma^k(a)$.

  (a) Montrer que f est surjective.

  (b) Montrer que f est injective.

  (c) Conclusion ?

Exercice 10.

Soient G un groupe abélien fini d'ordre n, noté multiplicativement, a un élément de G et H un sous-groupe propre de G tel que $a \notin H$. On considère l'ensemble :

$$N = \{t \in \mathbb{N}^* \mid a^t \in H\}.$$

(1) Montrer que N possède un plus petit élément. On pose $m = \inf N$.

(2) Montrer que $s \in N \Longrightarrow m \mid s$.

(3) Montrer que l'ordre de $\overline{a} \in G/H$ est m.

(4) On considère l'ensemble :

$$K = \{x \in G \mid \exists\, j \in \mathbb{Z},\ \exists\, h \in H \ :\ x = a^j h\}$$

  (a) Montrer que K est le plus petit sous-groupe de G contenant a et H.

  (b) Vérifier que K/H est égal à $\langle\overline{a}\rangle$ le sous-groupe engendré par $\overline{a}$.

  (c) En déduire que $|K| = m|H|$.

(5) Application : on pose $G = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, H = 6\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ et $a = \overline{4} \in G$

  (a) Justifier que H est un sous-groupe propre de G et vérifier que $|H| = 4$.

  (b) Vérifier que $a \notin H$ et que $m = 3$.

  (c) En déduire que $K = 2\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.